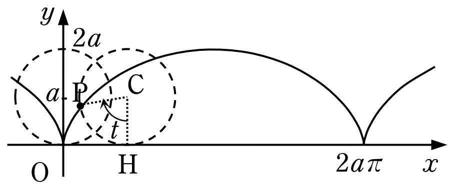
サイクロイド，トロコイド

(i) 半径 a の円 C が x 軸上をころがるとき，最初原点にあった定点 P が描く曲線の方程式は，媒介変数 t を用いて

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

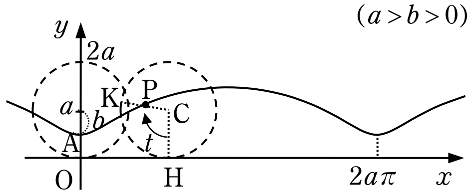
と表される。この曲線を**サイクロイド**（cycloid）という。

【図 1】$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$

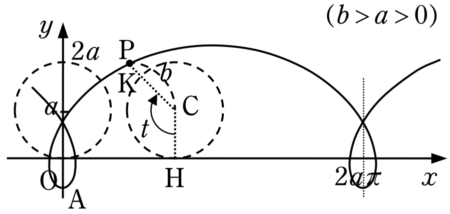


(ii) x 軸上をすべることなくころがる半径 a の円 C の内部（または外部）の固定した点が描く曲線を**トロコイド**という。

【図 2】$x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t$
$(a>b>0)$



【図 3】$x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t$
$(b>a>0)$



〔解説〕円 C の半径を a とし，円 C の中心が最初は点$(0,\ a)$ にあるとする。円 C の固定した点の位置を $\mathrm{A}(0,\ a-b)$とし，原点 O が K まで動いたとき，A が P の位置にきたとする。円 C が回転した角を t とすると，$\mathrm{OH}=\overset{\frown}{\mathrm{HK}}$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$=(at,\ a)+b\left(\cos\left(-t-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=(at,\ a)+b(-\sin t,\ -\cos t)$$
$$=(at-b\sin t,\ a-b\cos t)$$

P の座標を$(x,\ y)$とすると，

$x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t$　　（$b=a$ のとき，サイクロイドとなる。）

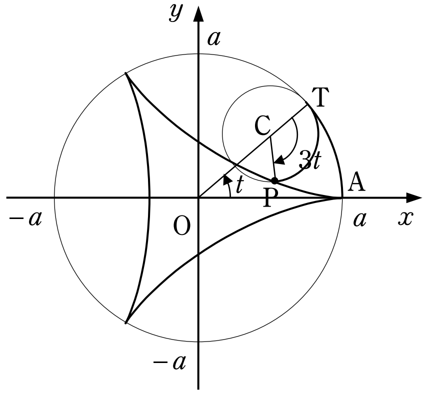
内サイクロイド

（原点を中心とする）半径 a の円 O に，半径 b（$b<a$）の円 C が内接しながらすべることなく転がるとき，動く円 C の周上に固定した点が描く曲線を**内サイクロイド**という。

動円 C の周上に固定した点の最初の位置を $\mathrm{A}(a,\ 0)$とし，$\angle\mathrm{AOC}=t$ とすると，C の周上に固定された点 $\mathrm{P}(x,\ y)$は，

$$x=(a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}t,$$
$$y=(a-b)\sin t-b\sin\frac{a-b}{b}t$$

で表される。



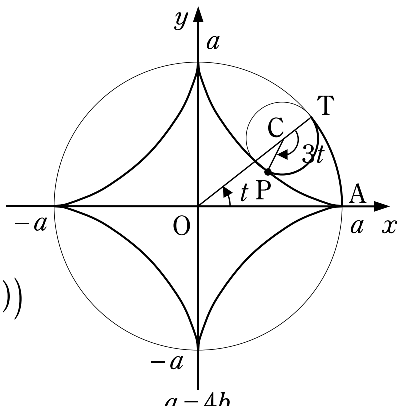
$a=3b$

〔解説〕2 円 O, C の接点を T とし，$\angle\mathrm{TCP}=\alpha$とすると，

$\overset{\frown}{\mathrm{TA}}=\overset{\frown}{\mathrm{TP}}$ より $b\alpha=at$ $\quad\therefore\quad \alpha=\dfrac{a}{b}t$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=(a-b)(\cos t,\ \sin t)+b(\cos(t-\alpha),\ \sin(t-\alpha))\\&=(a-b)(\cos t,\ \sin t)+b(\cos(t-\frac{a}{b}t),\ \sin(t-\frac{a}{b}t))\\&=(a-b)(\cos t,\ \sin t)+b\left(\cos\left(-\frac{a-b}{b}t\right),\ b\sin\left(-\frac{a-b}{b}t\right)\right)\\&=\left((a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}t,\ (a-b)\sin t-b\sin\frac{a-b}{b}t\right)\end{aligned}$$

$\therefore\quad x=(a-b)\cos t+b\cos\dfrac{a-b}{b}t,\quad y=(a-b)\sin t-b\sin\dfrac{a-b}{b}t$



アステロイド（星芒形）

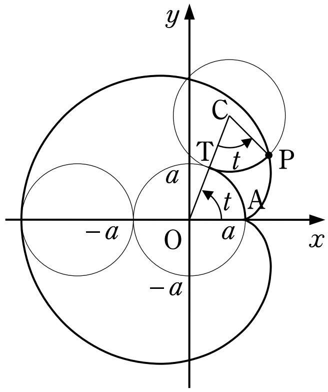
外サイクロイド

（原点を中心とする）半径 a の円 O に，半径 b の円 C が外接しながらすべることなく転がるとき，動く円 C の周上に固定した点が描く曲線を**外サイクロイド**という。

動円 C の周上に固定した点の最初の位置を $\mathrm{A}(a,\ 0)$とし，$\angle\mathrm{AOC}=t$ とすると，C の周上に固定された点 $\mathrm{P}(x,\ y)$は，

$$x=(a+b)\cos t-b\cos\frac{a+b}{b}t,\quad y=(a+b)\sin t-b\sin\frac{a+b}{b}t$$

で表される。



カージオイド（心臓形）

〔解説〕2 円 O, C の接点を T とし，$\angle\mathrm{TCP}=\alpha$とすると，

$\overset{\frown}{\mathrm{TA}}=\overset{\frown}{\mathrm{TP}}$ より $b\alpha=at$ $\quad\therefore\quad \alpha=\dfrac{a}{b}t$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=(a+b)(\cos t,\ \sin t)+b(\cos(\pi+t+\alpha),\ \sin(\pi+t+\alpha))\\&=(a+b)(\cos t,\ \sin t)+b(-\cos(t+\frac{a}{b}t),\ -\sin(t+\frac{a}{b}t))\\&=((a+b)\cos t,\ (a+b)\sin t)-\left(b\cos\frac{a+b}{b}t,\ b\sin\frac{a+b}{b}t\right)\\&=\left((a+b)\cos t-b\cos\frac{a+b}{b}t,\ (a+b)\sin t-b\sin\frac{a+b}{b}t\right)\end{aligned}$$

$\therefore\quad x=(a+b)\cos t-b\cos\dfrac{a+b}{b}t,\quad y=(a+b)\sin t-b\sin\dfrac{a+b}{b}t$